BUREAU D'APPLICATION DES METHODES
STATISTIQUES ET INFORMATIQUES

Document de Travail

BAMSI REPRINT 02/2003

Trois cas pratiques d'application de la méthode statistique des indices

Samuel AMBAPOUR

BAMSI

BAMSI B.P. 13734 Brazzaville

BAMSI REPRINT 02/2006

Trois cas pratiques d'application de la méthode statistique des indices*

Samuel AMBAPOUR

Résumé : Dans ce texte on examine trois cas pratiques d'application de la méthode statistique des indices. Ces cas concernent principalement la généralisation de la notion d'indice dans le but d'évaluer la part imputable à divers facteurs de variation dans l'évolution temporelle d'une grandeur globale. Le champ d'application retenu ici est la démographie : on analyse une grandeur globale, le taux de natalité (où taux de fécondité) dont l'évolution temporelle résulte de la variation de certains facteurs.

Mots clés : Indice statistique, indice de facteurs, taux de fécondité, taux de natalité

* Ce texte a été publié pour la première fois en 1991 (Document interne CASP, Brazzaville).

Introduction

Ce texte insiste sur certains aspects pratiques de la méthode statistique des indices. Le champ d'application retenu ici est la démographie. Trois cas pratiques sont étudiés :

- le premier cas concerne l'évaluation de la part imputable à divers facteurs dans l'évolution d'une grandeur globale ; on analyse une grandeur globale (taux de natalité) dont l'évolution temporelle résulte de trois facteurs ;
- le taux global de fécondité peut être présenté comme le produit de deux facteurs : le taux de fécondité par âge et la structure de la population féminine en âge de procréer. La structure par âge a t-elle un effet sur l'évolution de la fécondité ? On répond à cette question en appliquant les formules du type Laspeyres et Paasche : c'est le cas n°2.
- la méthode des indices peut aussi être utilisée à des fins de comparaison ; des indices spécifiques y sont construits par rapport à une population type : c'est le cas n°3. Ce cas peut se ramener au cas n°1 si les indices ainsi étudiés se présentent sous la forme des produits des indices et dont on veut suivre l'évolution.

1. Cas n° 1 : Indices de facteurs

Le taux brut de natalité est en général calculé comme le rapport des naissances vivantes d'une année à la population moyenne de cette année ; c'est-à-dire :

$$n = \frac{N}{\overline{S}} \ ;$$

mais on peut aussi le présenter de la façon suivante :

$$n = \frac{N}{\overline{S}} = \frac{N}{\sum_{15}^{49} S_X^F} \times \frac{\sum_{15}^{49} S_X^F}{\overline{S}^F} \times \frac{S^F}{\overline{S}}$$

C'est-à-dire comme un produit de trois facteurs :

- le taux global de fécondité ;
- la part de la population féminine en âge de procréer dans la population féminine ;
- la part de la population féminine dans la population totale.

Tableau 1 : Données sur la population de Brazzaville.

	Notations	Unités	1961	1974	Variations en %
Population	$\overline{S}$	milliers	134.100	298.900	222,8
Population féminine	$\overline{S}^{f}$	milliers	64.900	148.500	228,8
Population féminine en âge de procréer	$\sum_{15}^{49} S_X^F$	milliers	31.400	68.200	217,2
Taux global de fécondité	$\frac{N_X}{\sum_{15}^{49} S_X^F}$	‰	219,0	186,6	85,2
% de la population féminine en âge de procréer dans la population féminine	y	%	48,4	45,9	95,0
% de la population féminine dans la population totale	z	%	48,5	49,7	102,5
% des femmes en âge de procréer dans la population	$\frac{\sum_{15}^{49} S_x^F}{\overline{S}}$	%	23,4	22,8	97,7
Taux brut de natalité	$\frac{N}{\overline{S}}$	‰	50,7	42,3	83,4

Désignons respectivement par x, y et z ces trois facteurs ; on peut écrire que :
$n = x.y.z$;
et la variation relative de n entre deux dates $t = 0$ et $t = 1$ s'écrit :

$$I_n = \frac{n_1}{n_0} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0}$$

Le problème consiste donc à déterminer l'influence de chaque facteur dans la variation du taux de natalité en supposant que certains facteurs sont maintenus constants.

Nous disposons des données relatives aux recensements de la population de Brazzaville de 1961 et de 1974. Le taux brut de natalité de cette ville est passé de 50,57‰ en 1961 à 42,03‰ en 1974, soit une diminution de 16,06%. Nous nous proposons donc d'examiner cette baisse en fonction des trois facteurs ci-dessus énumérés. On peut adopter le schéma suivant :

$$\frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0} = \frac{x_1 y_0 z_0}{x_0 y_0 z_0} \times \frac{x_1 y_1 z_0}{x_1 y_0 z_0} \times \frac{x_1 y_1 z_1}{x_1 y_1 z_0}$$

La variation relative et absolue par rapport à chaque facteur est :

– **Facteur ‘’x’’**

$$I_{n/x} = \frac{n_x}{n} = \frac{x_1 y_0 z_0}{x_0 y_0 z_0}$$

$$\Delta n_x = \pm (x_1 - x_0) y_0 z_0$$

– **Facteur ‘’y’’**

$$I_{n/y} = \frac{n_{xy}}{n_x} = \frac{x_1 y_1 z_0}{x_1 y_0 z_0}$$

$$\Delta n_y = \pm x_1 (y_1 - y_0) z_0$$

– **Facteur ‘’z’’**

$$I_{n/z} = \frac{n_{xyz}}{n_{xy}} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_1 y_1 z_0}$$

$$\Delta n_z = \pm x_1 y_1 (z_1 - z_0)$$

En définitive on a :

$$n = \pm(\Delta n_x + \Delta n_y + \Delta n_z)$$

Calculons la variation relative du taux de natalité entre 1961 et 1974 :

$$I_n = \frac{n_1}{n_0} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0} = \frac{0{,}1866 \times 0{,}459 \times 0{,}497}{0{,}219 \times 0{,}484 \times 0{,}485} = 0{,}828$$

Déterminons maintenant l’influence de chaque facteur :

-**Indice du facteur ‘’x’’** (l’influence de la variation du taux de fécondité) :

$$I_{n/x} = \frac{n_x}{n} = \frac{x_1 y_0 z_0}{x_0 y_0 z_0} = \frac{0{,}1866 \times 0{,}4840{,}485}{0{,}219 \times 0{,}484 \times 0{,}485} = 0{,}852$$

- **Indice du facteur ‘’y’’** (l’influence de la variation du % de la population féminine en âge de procréer dans la population féminine) :

$$I_{n/y} = \frac{n_{xy}}{n_x} = \frac{x_1 y_1 z_0}{x_1 y_0 z_0} = \frac{0{,}1866 \times 0{,}459 \times 0{,}485}{0{,}1866 \times 0{,}484 \times 0{,}485} = 0{,}948$$

- **Indice du facteur ‘’z’’** (l’influence de la variation du % de la population féminine dans la population totale) :

$$I_{n/z} = \frac{n_{xyz}}{n_{xy}} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_1 y_1 z_0} = \frac{0{,}1866 \times 0{,}459 \times 0{,}497}{0{,}1866 \times 0{,}459 \times 0{,}485} = 1{,}025$$

Comme on le constate, les indices de facteurs ainsi calculés coïncident avec la variation relative des facteurs x, y et z (voir tableau 1). La variation absolue par rapport à chaque facteur est :

$$\Delta_{n/x} = (0{,}1866 - 0{,}219)0{,}484 \times 0{,}485 = -0{,}0075915$$

$\Delta_{n/y} = 0,1866 \times (0,459 - 0,484) \times 0,485 = -0,0022632$

$\Delta_{n/z} = 0,1866 \times 0,484(0,497 - 0,485) = +0,0010281$

L'augmentation (+) ou la baisse (-) du taux de natalité occasionnée par les différents facteurs en % par rapport à la variation totale est :

$\Delta_{n/x} = -86,01$

$\Delta_{n/y} = -25,64$

$\Delta_{n/z} = +11,65$

De ce qui précède, on peut dire que de 1961 à 1974, le taux de natalité à baissé de 17,2% et 86,01% (ce qui correspond assez bien d'ailleurs au 16,6% du tableau 1) de cette baisse est due à la diminution du taux global de fécondité qui a accusé une baisse de 14,8% entre les deux recensements. La baisse de la part des femmes en âge de procréer dans la population totale féminine de 5% a conduit à la réduction du taux de natalité de l'ordre de 25,64%. On constate cependant un écart très faible entre la variation du taux de natalité calculée à partir de la formule directe (c'est-à-dire 42,3 : 50,7) et la variation obtenue par la méthode des trois facteurs (16,6% contre 17,2%). En effet, il faut noter que entre le taux de natalité, le taux global de fécondité et les chiffres absolus S, S_X^F et $\sum_{15}^{49} S_X$ il n'y a pas une concordance totale.

Le schéma adopté ici n'est pas unique on aurait pu aussi écrire :

$$\frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0} = \frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_1 z_1} \times \frac{x_0 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_1} \times \frac{x_0 y_0 z_1}{x_0 y_0 z_0}$$

Les calculs montrent qu'on obtient sensiblement les mêmes résultats.

On vient de voir que la baisse du taux de natalité est due essentiellement à la baisse du taux global de fécondité. Le tableau 1 montre que la croissance des femmes en âge de procréer fût moins forte que celle de toute la population féminine et que l'augmentation de cette dernière dépasse celle de la population en général. Une analyse analogue à celle du taux brut de natalité peut être faite en ce qui concerne le taux global de fécondité. En effet, le taux global de fécondité peut être présenté de la façon suivante :

$$F = \frac{N}{\sum_{15}^{49} S_X^F} = \frac{\sum_{15}^{49} \frac{N_X}{S_X^F} \times S_X^F}{\sum_{15}^{49} S_X^F} \quad ;$$

où N_X représente les naissances vivantes survenues chez les femmes ayant un certain âge x. L'idée de présenter la formule précédente sous cette forme est la suivante : le taux global de fécondité est le produit de deux facteurs :

- le taux de fécondité par âge ;

$$F_X = \frac{N_X}{S_X^F}$$

- la structure de la population féminine en âge de procréer ;

$$C_X = \frac{S_X^F}{\sum_{15}^{49} S_X^F}$$

On a en définitive :

$$F = \sum_{15}^{40} F_X C_X$$

Nous allons envisager autrement l'analyse de ces facteurs, qui fait l'objet de notre deuxième cas pratique.

2. Cas n° 2 : Indices de facteurs du type Laspeyres et Paasche

Les taux de fécondité par âge de la ville de Brazzaville sont les suivants :

Tableau 2 : Taux de fécondité par âge (en ‰)

Groupes d'âges	1961	1974
15 – 19	203,0	115,6
20 – 24	301,0	250,6
25 – 29	262,0	268,9
30 – 34	216,0	226,9
35 – 39	156,0	184,2
40 – 44	78,0	113,7
45 – 49	25,0	48,8
15 – 49	219,0	186,6

Nous savons que le taux global de fécondité est une moyenne des taux de fécondité par âge pondérée par la structure de la population féminine en âge de procréer. Or cette structure évolue avec le temps (voir tableau 3). Le problème consiste donc à savoir comment influe cette structure sur le taux global de fécondité. Indépendamment du fait que l'effectif de la population féminine ait doublé et ce pratiquement à tous les âges, on observe cependant une distribution ''défavorable'' de cette même population. Deux constats peuvent être relevés :

- la diminution du pourcentage des groupes d'âges dont les taux de fécondité ont augmenté ;
- l'augmentation au contraire du pourcentage des groupes d'âges qui ont vu baissé le taux de fécondité.

Une question reste tout de même posée : la structure par âge s'est-elle détériorée ou pas ? La réponse sera donnée en appliquant la méthode des indices.

1- Indices de fécondité avec une structure par âge ''fixe''

a)- Pondération par la structure d'âge de l'année de base

$$\frac{1}{0} I_F^{C_0} = \frac{\sum F_1 C_0}{\sum F_0 C_0}$$

b)- Pondération par la structure d'âge de l'année courante

$$\frac{1}{0} I_F^{C_1} = \frac{\sum F_1 C_1}{\sum F_0 C_1}$$

2- Indice de la structure par âge

a)- pondération par la fécondité de l'année de base

$$\frac{1}{0} I_C^{F_0} = \frac{\sum C_1 F_0}{\sum C_0 F_0}$$

b)- pondération par la fécondité de l'année courante

$$\frac{1}{0} I_C^{F_1} = \frac{\sum C_1 F_1}{\sum C_0 F_1}$$

Par conséquent on a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{0} I_{F_1C} = \frac{\sum F_1 C_1}{\sum F_0 C_0} = \frac{\sum F_1 C_1}{\sum F_0 C_1} \times \frac{\sum C_1 F_0}{\sum C_0 F_0}$$

$$\frac{1}{0} I_{F_1C} = \frac{\sum C_1 F_1}{\sum C_0 F_0} = \frac{\sum F_1 C_0}{\sum F_0 C_0} \times \frac{\sum C_1 F_1}{\sum C_0 F_1}$$

Tableau 3 : Répartition de la population féminine âgée de 15 à 49 ans

Groupes d'âges	Population féminine (en milliers)		en %	
	1961	1974	1961	1974
15 – 19	6.200	17.400	19,7	25,5
20 – 24	6.700	14.300	21,3	21,0
25 – 29	6.300	11.000	20,1	16,1
20 – 29	13.000	25.200	41,4	36,9
30 – 34	4.800	8.300	15,3	12,2
35 – 39	3.100	7.700	10,0	11,3
40 – 44	3.000	5.500	9,5	8,2
45 – 49	1.300	4.000	4,1	5,8
30 – 49	12.200	25.500	38,8	37,4
15 – 49	31.400	68.200	100,0	100,0
Population féminine totale	64.900	148.500	-	-
% de la population âgée de 15 – 49 ans dans la population féminine	48,4	45,9	-	-

Dans le tableau 4 sont indiqués les calculs effectués pour obtenir les indices décrits précédemment et où :

– $\sum F_0C_0$ est le taux global de fécondité de 1961 ;
– $\sum F_1C_1$, le taux global de fécondité de 1974 ;
– $\sum F_1C_0$ et $\sum F_0C_1$ sont les taux globaux de fécondité avec des structures par âge respectivement de l'année 0 et l'année 1 prises comme base ;

Tableau 4 : tableau de calcul des indices de fécondité et de la structure par âge

Groupes d'âges	1961 (0)		1974 (1)	
	F_0C_0	F_0C_1	F_1C_1	F_1C_0
15 – 19	4531	5865	2948	2277
20 – 24	6411	6321	5262	5338
25 – 29	5266	4218	4329	5405
30 – 34	3305	2635	2768	3471
35 – 39	1560	1763	2081	1842
40 – 44	741	632	921	1080
45 – 49	102	145	283	200
TOTAL	21916	21579	18542	19613
En moyenne : taux global de fécondité	219,16	215,79	185,42	196,13

Le chiffre de 1961 du tableau 4 peut être interprété de la façon suivante : si la population étudiée avait gardé la même structure par âge qu'en 1961, le taux global de fécondité en 1974 serait de 196,1‰ ; donc légèrement supérieur au taux réellement observé c'est-à-dire 186‰

L'application des formules ci-dessus donne les résultats suivants :

- Indices de fécondité :

$$\frac{1}{0}I_F^{C_0} = \frac{\sum F_1 C_0}{\sum F_0 C_0} = \frac{19613}{21916} = 0,895$$

$$\frac{1}{0}I_F^{C_1} = \frac{\sum F_1 C_1}{\sum F_0 C_1} = \frac{18592}{21579} = 0,861$$

- Indices de la structure par âge :

$$\frac{1}{0}I_C^{F_0} = \frac{\sum C_1 F_0}{\sum C_0 F_0} = \frac{21579}{21916} = 0,984$$

$$\frac{1}{0}I_C^{F_1} = \frac{\sum C_1 F_1}{\sum C_0 F_1} = \frac{18592}{19613} = 0,948$$

Les indices de structure ainsi obtenus peuvent aider à savoir si la structure par âge s'est améliorée ou non.

Indice de la structure par âge	Structure par âge
I >0	amélioration
I = 1	stabilisation
I < 0	détérioration

Les indices obtenus sont inférieurs à l'unité, on peut donc conclure que la structure de la population féminine âgée de 15 à 49 ans s'est détériorée entre 1961 et 1974. Le taux de fécondité aurait pu être de 196,1‰ si la population avait gardé la même structure qu'en 1961, et ce taux aurait pu être en augmentation si cette structure s'était améliorée entre les deux recensements.

Cas n°3 : Comparaison de deux populations

L'influence conjuguée des facteurs de structure et de facteurs de comportement sur la fécondité peut être étudiée par la méthode des indices, notamment en recourant à la notion de population type. Des indices spécifiques peuvent montrer l'influence des facteurs restrictifs malthusiens (mariage tardif, diminution des rapports sexuels des femmes en âge d'être fécondées) et néo-malthusiens (limitation voulue du nombre de naissances du couple). Des indices rappellent à quel point une population peut-être proche de la fécondité maximale (fécondité légitime des huttérites pendant la période 1921-1930) qu'elle pourrait atteindre et quelle part de cette marge est due aux facteurs néo-malthusiens. Soient les notations suivantes :

f_i - naissances par femmes du groupe d'âge i ;

g_i - naissances par femmes mariées du groupe d'âge i ;

h_i - naissances par femmes non mariées du groupe d'âge i ;

w_i - nombre de femmes du groupe d'âge i ;

m_i - nombre de femmes mariées du groupe d'âge i ;

u_i - nombre de femmes non mariées du groupe d'âge i ;

F_i - naissances par femmes du groupe d'âge i dans la population type (huttérites) ;

On construit les indices suivants (Indices de Coale) :

- Indice de fécondité totale : $I_f = \frac{\sum f_i w_i}{\sum F_i w_i}$
- Indice de fécondité légitime : $I_g = \frac{\sum g_i m_i}{\sum F_i m_i}$
- Indice de fécondité illégitime : $I_h = \frac{\sum h_i u_i}{\sum F_i u_i}$
- Indice de nuptialité : $\mathrm{I}_m = \frac{\sum F_i m_i}{\sum F_i w_i}$

I_f est le rapport des naissances observées dans une population donnée aux naissances qui seraient enregistrées si les femmes de chaque groupe d'âge avait suivi la loi type (population type) ou loi de fécondité maximale.

I_g est le rapport des naissances légitimes aux naissances obtenues si toutes les femmes mariées suivaient la loi type (c'est-à-dire celle des femmes huttérites). Par analogie, on calcule I_h.

I_m est le rapport des enfants mis au monde par les femmes mariées qui suivraient la loi type aux enfants mis au monde si toutes les femmes suivaient cette loi type.

Des formules précédentes, on peut écrire que :

$I_f = I_g I_m + (1 - I_m) I_h$

Et : $I_f = I_g I_m$, dans les sociétés où la fécondité illégitime est négligeable, ramenant ainsi l'indice de fécondité au produit de ces deux composantes malthusiennes et néo-malthusiennes.

L'application de cette méthode aux données de la ville de Brazzaville donne les résultats suivants :

$$I_f = \frac{\sum f_i w_i}{\sum F_i w_i} = \frac{12673}{26891} = 0,47 \quad ;$$

$$\mathrm{I}_m = \frac{\sum F_i m_i}{\sum F_i w_i} = \frac{17608}{26891} = 0,65 \quad ;$$

$$\mathrm{I}_g = \frac{I_f}{I_m} = \frac{0,47}{0,65} = 0,72$$ (en supposant négligeable la fécondité illégitime).

Tableau 5 : Calcul des indices de Coale pour la ville de Brazzaville

Groupes d'âges	f_i	F_i	Nombre de femmes (en milliers)	Femmes mariées (en milliers)	$f_i w_i (:100)$	$F_i w_i (:100)$	$F_i m_i (:100)$
15 – 19	115,6	300	17.700	4.800	2.011	5.520	1.440
20 – 24	250,6	550	14.300	9.600	3.583	7.865	5.280
25 – 29	268,9	502	11.000	8.800	2.956	5.511	4.417
30 – 34	226,9	447	8.300	6.700	1.883	3.710	2.995
35 – 39	184,2	406	7.700	6.000	1.418	3.120	2.436
40 – 44	113,7	222	5.500	4.000	625	1.221	888
45 – 49	48,8	61	4.000	2.500	195	244	152
-	-	-	-	-	12.673	26.891	17.608

I_f =0,47 signifie que la fécondité élevée constatée à Brazzaville représentait pratiquement la moitié de celle de la population type.

I_g =0,72 veut dire que la fécondité légitime à Brazzaville représentait 72% de la fécondité des huttérites. Notons que si l'indice de fécondité légitime est compris entre 0,64 et 1, on parle d'absence de limitation de naissances et cette fécondité est qualifiée de ''naturelle''.

$I_m = 0{,}65$; ce qui représente 65% de la nuptialité des huttérites.
En mettant I_f sous la forme $I_f = I_g I_m$ et disposant des données sur deux ou plusieurs années, on peut étudier l'évolution de I_f sous l'influence de ces deux facteurs c'est-à-dire I_g et I_m et déterminer quel facteur est responsable de la baisse ou de la hausse de I_f ; Ce qui est équivalent à étudier l'influence des facteurs malthusiens et néo-malthusiens dans l'évolution de la fécondité.

Note : La population type choisie est celle des huttérites ; secte religieuse vivant en Amérique du Nord dans de très bonnes conditions sanitaires, un niveau de vie relativement élevé, une faible mortalité et ne pratiquant pas la limitation des naissances. C'est une population fermée dont l'augmentation est due essentiellement au taux d'accroissement naturel très élevé. En effet, de 1880 à 1950, son effectif avait été multiplié par 19, passant de 443 à 8.542 personnes. En 1965 cet effectif atteignait 17.800 personnes, soit deux fois plus qu'en 1950.

Conclusion

Les cas étudiés ici ne sont pas les seuls dans l'application de la méthode des indices. Même si le champ d'application examiné est la démographie, on peut utilement l'étendre à d'autres domaines, tels que l'économie, ou la gestion des entreprises. En économie par exemple on montre dans l'étude des indices de prix, de quantité et de valeur que l'indice de la dépense totale est égal au produit des indices de prix et de quantité ; il est donc possible d'étudier l'évolution de la dépense totale sous l'influence des facteurs prix et quantité.

Bibliographie

Calot, G., (1965). *Cours de statistique descriptive*. Dunod, 1965.

C.N.S.E.E., (1974). *Recensement général de la population de 1974*. Commune de Brazzaville – Résultats définitifs : Brazzaville 1975.

Coale, A. J., (1967). Factors associated with the development of low fertility : an historic summary. *World population conference Belgrade 1965*. New York 1967.

Kourman, M.V., (1970). *Problèmes actuels de la démographie* (en russe). Statistica Moscou 1970.