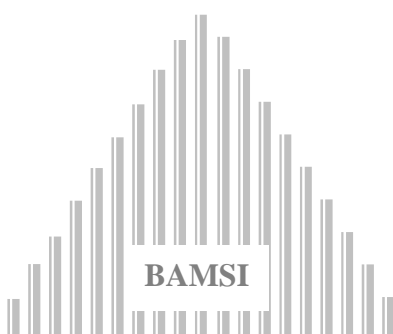


BUREAU D'APPLICATION DES METHODES
STATISTIQUES ET INFORMATIQUES

DT 02/2001

Estimation des frontières de production
et mesures de l'efficacité technique

Samuel AMBAPOUR



BAMSI B.P. 13734 Brazzaville

DT 02/2001

**Estimation des frontières de production
et mesures de l'efficacité technique**

*Samuel AMBAPOUR**

Résumé : L'objet de cet article est de présenter la méthodologie permettant d'estimer les frontières de production et les mesures de l'efficacité technique qui en découlent.

Mots clés : Frontière de production, efficacité technique.

SNE BP 95, TEL : 81 05 69, FAX : 81 05 69 ; BAMSI BP 13734.

E-mail : ambapour_samuel@yahoo.fr

Je tiens à remercier S. Perelman (Université de Liège et CREPP) et P. Plane (CNRS et CERDI) pour avoir mis à ma disposition certains de leurs écrits concernant le sujet traité ici.

Ces documents de travail ne reflètent pas la position du BAMSI mais n'engagent que ses auteurs.

Introduction

Une fonction de production établit, sous sa forme la plus générale, une relation entre les « intrants » ou inputs et les « extrants » ou outputs. Elle peut être aussi conçue comme une frontière, celle du possible pour une entreprise ou toute autre unité de décision. Pour Thiry et Tulkens (1988) : « cette interprétation est naturelle dès l'instant où l'on convient de préciser que la fonction de production spécifie les quantités maximales d'outputs accessibles pour tout niveau des inputs, et, pour tout niveau de l'output, les quantités minimales nécessaires à leur obtention ». Ainsi, pour tenir compte du critère de maximalité du produit obtenu d'une part, et d'accepter la possibilité d'une sous utilisation des moyens de production d'autre part, l'on a souvent recourt à la notion de frontière au détriment de la fonction de production (Agbodji, 1996). Le terme de frontière fait donc référence à une fonction limite. Pour S. Perelman (1996), la frontière est une sorte d'enveloppe, qui coïncide souvent avec l'ensemble des points identifiés comme représentatifs de la meilleure pratique dans le domaine de la production, et par rapport à laquelle, la performance de chaque entreprise pourra être comparée.

La méthodologie des frontières permet l'identification, la mesure et l'analyse de l'efficacité technique ou productive. Trois types d'efficacité peuvent être observés au niveau de l'entreprise (Chaffai, 1989) :

- l'efficacité technique. Une entreprise est techniquement efficace, lorsqu'elle se situe sur la frontière ; c'est-à-dire qu'avec une quantité déterminée de facteurs, elle obtient le plus haut niveau d'outputs ;
- l'efficacité allocative. Elle implique que l'entreprise d'une part minimise ses coûts totaux de production, et d'autre part elle choisit le niveau de cette dernière qui doit socialement optimal (notamment par une politique de prix de vente ou de tarification, appropriée) ;
- l'efficacité à l'échelle. C'est le cas d'une entreprise en situation de concurrence parfaite, et qui opère à une échelle appropriée, c'est-à-dire que son coût marginal doit être égal au prix du marché de son produit.

En économie, quelle que soit l'activité productive que l'on étudie, on raisonne toujours en termes d'objectifs à atteindre. L'objectif d'efficacité technique a ceci de particulier qu'il est compatible avec les autres objectifs, quelle que soit leur pondération, il n'y a pas de justification à l'inefficacité technique (Gathon, Pestieu, 1985).

Le concept d'efficacité technique trouve son origine dans les travaux théoriques fondamentaux au sujet du comportement des firmes : travaux de Debreu (1951), de Koopmans (1951) et de Farrell (1957). C'est surtout ce dernier auteur, qui a proposé une approche pour l'estimation de frontières d'efficacité, partant de l'idée que les informations disponibles sur une activité donnée, devaient permettre l'estimation du « best practice envelope », pour cette activité.

Deux décennies plus tard, deux grandes familles de méthodes sont concurrentes dans la manière de construire la frontière et donc de calculer les efficacités techniques : les méthodes paramétriques et les méthodes non paramétriques. Dans l'approche paramétrique, on suppose que la frontière est représentable par une fonction analytique dépendant d'un nombre fini de paramètres. Le problème consiste à spécifier cette fonction et à estimer les paramètres, soit par les méthodes statistiques de l'économétrie, soit par les méthodes issues de la programmation linéaire. Dans les méthodes non paramétriques, en revanche, on ne spécifie pas de forme analytique particulière pour la frontière, mais plutôt les propriétés formelles que l'ensemble de production est supposé satisfaire (Taffé, 1998). L'approche non paramétrique découle des travaux initiaux de Farrell et implique le recours aux techniques de la programmation linéaire.

Le choix entre les deux approches n'est pas toujours facile. Bosman et Frecher (1992) recommandent de se baser sur la connaissance que l'on a de la technologie du secteur étudié. Ces auteurs pensent que, lorsque l'on a une idée assez nette de ce qu'est la technologie sous-jacente, cas du secteur agricole et des branches manufacturières par exemple, l'estimation économétrique des frontières de production paramétrique a un sens. Par contre, lorsqu'il s'agit d'une unité de décision dont l'activité est la production des services, une approche non paramétrique semble d'avantage appropriée, du fait qu'elle ne repose sur aucune hypothèse explicite concernant la technologie et qu'elle s'applique à des activités ayant plusieurs outputs et plusieurs inputs.

L'objectif que l'on assigne à cet article est de présenter les deux grandes familles de méthodologies d'estimation d'une frontière de production. Le texte s'articule autour de deux axes principaux que l'on a complétés par deux applications dans une troisième partie. Dans la première partie, nous exposons les méthodes paramétriques. On décrit les deux types de modèle que l'on rencontre dans la littérature : les frontières paramétriques déterministes et les frontières paramétriques stochastiques. Les premières attribuent l'écart à la frontière uniquement à des facteurs qui sont sous le contrôle du gestionnaire alors que les secondes supposent qu'il y a encore d'autres

facteurs qui influencent l'efficacité et qui ne sont pas contrôlables. Dans la deuxième partie, nous traitons le cas des méthodes non paramétriques connues sous le vocable anglais de Data Envelopment Analysis (DEA). Fondée sur la programmation linéaire, la méthode de DEA est encore appelée "méthode du point extrême" : elle détermine la frontière au sommet des observations plutôt qu'un plan de régression en leur centre. Nous retenons deux variantes de cette méthode. Dans la première, on fait l'hypothèse que la technologie est à rendements constants (The Constant Returns to Scale Model) ; modèle CCR (Charnes, Cooper et Rhodes (1978)). Dans la deuxième, on relâche cette hypothèse pour admettre des rendements non croissants ou variables (The variable Returns to Scale Model) ; modèle BCC (Banker, Charnes et Cooper (1984)). La troisième partie est pratique. On donne deux applications de ces méthodes. Dans un premier temps, sur un échantillon de dix sociétés africaines productrices d'électricité, est estimée une frontière paramétrique déterministe de type Cobb-Douglas. Le calcul des efficacités techniques et le classement de ces sociétés sont fournis. Dans un deuxième temps, l'approche non paramétrique est utilisée pour estimer l'efficacité technique de neuf compagnies de chemins de fer opérant en Afrique subsaharienne. Le modèle utilisé, permet également de classer lesdites compagnies selon leur degré d'efficacité technique.

1. Les méthodes paramétriques

Comme on l'a déjà indiqué, une fonction de production donne l'output maximum réalisable à partir du vecteur d'inputs x . Si y est l'output observé, la technologie est définie par la fonction de production $f(\cdot)$ vérifiant les propriétés de stricte concavité, continuité et monotonocité. Elle s'écrit :

$$y = f(x, \beta) - u \tag{1}$$

Avec, $u \geq 0$

La fonction $f(\cdot)$ est linéarisée. β est un vecteur inconnu de paramètres à estimer ; u mesure l'écart entre l'output observé y et l'output maximum réalisable par la technologie efficace. Il représente l'inefficacité technique et est nul pour les entreprises ou unités de décision techniquement efficaces. Par ailleurs si u ne représente qu'un seul effet, celui de l'inefficacité technique, on parle alors de modèle déterministe. Dans ce cas, on a une frontière paramétrique déterministe unique pour toutes les entreprises ; et l'écart qui sépare une observation de la frontière est imputable à des

facteurs qui sont sous le contrôle du gestionnaire. En d'autres termes, l'inefficacité technique résulte par exemple d'une mauvaise gestion, d'un mauvais choix technologique, d'un personnel incompetent, etc. Dans ce type de modèle, les mesures d'efficacité de Farrell sont simplement estimées par le quotient :

$$\frac{y_i}{f(x_i, \hat{\beta})} \quad (2)$$

où, $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β

Si l'on ajoute à la spécification déterministe, un terme aléatoire v , on obtient un modèle stochastique et la frontière est dite paramétrique stochastique. Elle est différente pour chaque entreprise. Ce modèle prend en considération, non seulement les facteurs qui sont sous le contrôle du gestionnaire, mais aussi ceux exogènes à l'entreprise. Ce sont en particulier des chocs aléatoires : la conjoncture économique, les grèves, la météo... On y inclut également les erreurs de mesure sur les variables, ainsi que les erreurs de spécification du modèle. Une fois la frontière identifiée, les mesures d'efficacité de Farrell sont données par le quotient :

$$\frac{y_i}{f(x_i, \hat{\beta}) + v_i} \quad (3)$$

Notons enfin que la fonction $f(\cdot)$ peut avoir plusieurs formes. Les plus employées sans la littérature sont Cobb-douglas et Translog.

On va maintenant présenter les méthodes d'estimation de cette fonction afin d'évaluer l'inefficacité technique. On exposera successivement les approches déterministes et stochastiques.

1.1. Frontières paramétriques déterministes

1.1.1. Estimation non statistique

Dans le prolongement des analyses pionnières de Farrell (1957), Aigner et Chu (1968) ont cherché la valeur de β qui minimise soit la valeur absolue, soit le carré des écarts entre les observations de l'output y et la frontière $f(\cdot)$. Cette estimation a été faite en résolvant le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i, \beta)| \\ sc \\ y_i \leq f(x_i, \beta) \end{array} \right. \quad (4)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i, \beta)|^2 \\ sc \\ y_i \leq f(x_i, \beta) \end{array} \right. \quad (5)$$

où, $i=1, \dots, n$ est l'indice des unités de décision (ou entreprises) observées. On se ramène à une programmation linéaire pour (4) et quadratique pour (5). Dans les deux cas, les contraintes assurent que tous les écarts soient de même signe. C'est donc une méthode de minimisation des résidus unilatères.

La méthode d'Aigner et Chu a le défaut de présenter les inconvénients suivants :

- premièrement, il n'est pas possible de faire de l'inférence, car les estimations calculées n'ont pas de propriétés statistiques ;
- le deuxième inconvénient est la sensibilité des estimateurs aux observations extrêmes.

1.1.2. Estimation Statistique

On veut donner à l'estimation de la frontière $f(\cdot)$ des propriétés statistiques en ayant recours à des méthodes qui vont suivre.

a) Méthode des moindres carrés corrigés

On peut réécrire le modèle (1) sous la forme :

$$y_i = \beta + \sum \beta_j x_{ij} - u_i \quad (6)$$

et l'on suppose que :

H₁: les termes u_i sont identiquement et indépendamment distribués selon une loi normale de moyenne $\mu > 0$ et de variance $\sigma_u^2 < +\infty$

H₂: u est sans corrélation avec les inputs.

On peut constater que sous la première hypothèse la méthode des moindres carrés n'est pas applicable ($E(u_i) \neq 0$). Par cette méthode, on obtient des estimateurs sans biais pour tous les paramètres sauf pour le terme constant, puisque le terme u a une moyenne positive dès que l'efficacité productive n'est pas parfaite pour toutes les observations. On a en effet :

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 - \mu$$

Avec, $\mu = E(u)$

Richmond (1974), qui est à l'origine de cette méthode propose de réécrire l'équation (6) sous la forme suivante :

$$y_i = \beta'_0 + \sum \beta_j x_{ij} - \delta_i \quad (7)$$

Où, $\delta = (u - \mu)$ est le nouveau terme de l'erreur qui a toutes les propriétés désirées (sauf la normalité). $\beta'_0 = (\beta_0 - \mu)$ est un terme constant à estimer, qui admet des erreurs de moyenne nulle et de variance σ^2

L'estimation de l'équation (7) par la méthode des moindres carrés donnera des estimateurs sans biais pour tous les paramètres.

Pour identifier complètement la frontière, il suffit d'ajouter à la constante estimée par les moindres carrés, la moyenne du terme u . Si par exemple, la distribution de u est supposée suivre une loi Gamma :

$$g(u) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_u)} (u)^{\sigma_u - 1} \exp(-u); 0 < u < +\infty; \sigma > 0,$$

on a : $E(u) = Var(u) = \mu$; On estimera alors μ par $\hat{\sigma}^2$ ($\hat{\sigma}^2$ représente la variance estimée des résidus des moindres carrés du modèle (6)). L'estimation des inefficacités individuelles des unités de décision s'obtient à partir des résidus de l'équation (7), soit :

$$\hat{u}_i = -(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum \hat{\beta}_j x_{ij}) = -\hat{\delta}_i + \hat{\mu} \quad (8)$$

La méthode des moindres carrés corrigés présente deux inconvénients :

- avec cette méthode, même après la correction, certains résidus peuvent encore être négatifs et, par conséquent, la frontière n'enveloppe pas le nuage de points ;

- la correction dépend du choix de la distribution des résidus.

Pour ces deux raisons, Thiry et Tulkens (1988), notent que « on ne peut accorder une confiance très grande au niveau absolu de la valeur numérique attribuée par cette méthode à l'efficacité de chaque observation. Par contre, le rangement des observations selon les degrés d'efficacité qu'elle évalue est plus fiable, car ce rangement est évidemment indépendant de la correction du terme constant, et une observation est d'autant plus efficace que son résidu est positif ».

b) Moindres carrés décalés.

Cette méthode a été proposée par Greene (1980) pour résoudre le problème du signe des résidus dans la méthode précédente. En effet, dans (7), certains résidus peuvent avoir des signes erronés. La méthode de Greene consiste simplement à estimer le terme constant de manière convergente, en translatant la droite des moindres carrés de façon telle que tous les résidus soient de même signe (tous négatifs ou nuls). On doit avoir :

$$\hat{u}_i = \sup_i(\hat{\delta}_i) - \hat{\delta}_i \quad (9)$$

L'avantage de cette méthode par rapport à celle des moindres carrés corrigés est que l'on n'a pas besoin de spécifier la densité de u . Par contre, l'inconvénient est que la distribution asymptotique de la constante corrigée n'est pas connue et en conséquence, ne permet pas de connaître la distribution des efficacités.

c) Estimation par le maximum de vraisemblance

Sous les deux hypothèses évoquées en a) et en spécifiant une distribution particulière pour u , le modèle (1) peut être estimé par le maximum de vraisemblance. On parle alors de frontière déterministe statistique. Schmidt (1976) a par exemple montré que l'ajustement par le maximum de vraisemblance du modèle (1) avec u suivant une loi double exponentielle ou bien une loi semi normale est solution des systèmes (4) et (5) respectivement. De son côté, Greene a montré que si la distribution de u est asymétrique, l'estimateur du maximum de vraisemblance est plus efficace que l'estimateur des moindres carrés.

Comme on peut le constater, avec cette méthode, s'estompe la "frontière" entre estimations statistique et non statistique d'une frontière déterministe.

1.2. Frontières paramétriques stochastiques

L'approche stochastique a été proposée simultanément par Aigner, Lovell et Schmidt (1977) et Meusen et Van Den Broeck (1977). Un terme d'erreur aléatoire v est ajoutée dans la relation (1). On obtient un modèle à erreur composée :

$$y = f(x, \beta) + (v - u) \quad (10)$$

$$u \geq 0; -\infty \leq v \leq +\infty$$

v représente l'écart dû aux aléas qui influencent la production et qui ne sont pas directement sous le contrôle du gestionnaire. Par ailleurs v et u sont indépendants l'un de l'autre, ainsi que de x . La relation (10) peut encore s'écrire sous la forme :

$$y_i = \beta_0 + \sum \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \quad (11)$$

Avec $\varepsilon_i = v_i - u_i$

Soit sous la forme matricielle :

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (11')$$

L'estimation du modèle (11) peut se faire par les moindres carrés ou par le maximum de vraisemblance si l'on spécifie les distributions des termes d'erreur u et v .

1.2.1. Le Maximum de Vraisemblance

Suivant Aigner, Lovell et Schmidt (1977), on prend une distribution normale pour v , c'est à dire que $v \rightarrow N(0, \sigma_v^2)$ et une distribution normale centrée, tronquée à gauche en zéro pour u , c'est à dire $u \rightarrow |N(0, \sigma_u^2)|$. La densité jointe pour v et u sachant que les deux distributions sont indépendantes s'écrit :

$$f(u, v) = \frac{1}{\pi \sigma_u \sigma_v} \exp \left[-\left(\frac{u^2}{2\sigma_u^2} \right) - \left(\frac{v^2}{2\sigma_v^2} \right) \right]$$

Si l'on remplace v en fonction de u , l'on obtient :

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{\pi \sigma_u \sigma_v} \exp \left[-\left(\frac{u^2}{2\sigma_u^2} \right) - \left(\frac{\varepsilon^2 + u^2 + 2u\varepsilon}{2\sigma_v^2} \right) \right] \quad (13)$$

Calculons maintenant la densité de ε en intégrant la relation (13) par rapport à u .
On a :

$$f(\varepsilon) = (2/\sigma) f^*(\varepsilon/\sigma) [1 - F^*(\varepsilon\lambda/\sigma)] \quad -\infty \leq \varepsilon \leq +\infty \quad (14)$$

Avec

$$\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

Et

$$\lambda = \sigma_u / \sigma_v$$

$F^*(.)$ désigne la fonction de répartition d'une distribution normale centrée réduite et $f^*(.)$ sa densité. Le moment d'ordre un et la variance sont donnés par :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon) &= E(u) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_u \\ V(\varepsilon) &= V(u) + V(v) \\ V(\varepsilon) &= \left[\frac{\pi-2}{\pi} \right] \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Signalons que la paramétrisation $\lambda = \sigma_u / \sigma_v$ est intéressante ; λ est considéré comme une mesure de la variabilité relative de deux sources d'inefficacité. $\lambda^2 \rightarrow 0$ implique que $\sigma_u^2 \rightarrow +\infty$ et/ou que $\sigma_v^2 \rightarrow 0$, ce qui veut dire que les chocs aléatoires dominent dans l'explication de l'inefficacité. De même, lorsque $\sigma_v^2 \rightarrow 0$ alors les écarts à la frontière sont essentiellement dus à l'inefficacité technique. Disposant de n observations et sachant (14), le logarithme de la vraisemblance de (11') s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Log}L(y/\beta, \lambda, \sigma^2) &= n \text{Log} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + n \text{Log} \sigma^{-1} \\ &+ \sum_{i=1}^n \text{Log} [1 - F^*(\varepsilon_i \lambda \sigma^{-1})] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Le calcul des dérivées premières par rapport au vecteur β et par rapport aux deux paramètres λ et σ^2 et l'annulation de ces dérivées, conduit à l'obtention des estimateurs correspondants qui sont solutions du système des équations de vraisemblance qui devront être résolues au moyen d'algorithmes d'optimisation.

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Log} L}{\partial \text{Log} \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta' x_i) x_i + \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} x_i = 0 \\ \frac{\partial \text{Log} L}{\partial \text{Log} \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} (y_i - \beta' x_i) = 0 \\ \frac{\partial \text{Log} L}{\partial \text{Log} \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta' x_i)^2 + \frac{\lambda}{2\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} (y_i - \beta' x_i) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$F_i^* = F[(y_i - \beta' x_i)\lambda / \sigma]$ et f_i^* la densité de probabilité correspondante.

Soit $\Theta = (\beta, \lambda, \sigma^2)$ le vecteur des paramètres qui maximise (16). Pour avoir les écarts-types des coefficients estimés $(\beta, \lambda, \sigma^2)$ par le maximum de vraisemblance, solution de (17), on prendra l'inverse de la quantité (Chaffai, 1989) :

$$E \left[\frac{\partial \text{Log} L}{\partial \Theta \Theta'} \right] \quad (18)$$

1-2-2 La Méthode des moindres carrés et méthode des moments

Le modèle (11) peut s'écrire :

$$y_i = \beta_0 - \sum \beta_j x_{ij} + (v_i - (u_i - \mu)) \quad (19)$$

On peut le reparamétriser comme suit :

$$y_i = \beta_0' - \sum \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i' \quad (19')$$

Avec

$$\beta_0' = (\beta_0 - \mu)$$

$$\varepsilon_i' = v - (u_i - E(u)) = v_i - (u_i - \mu) = \varepsilon_i + \mu$$

La procédure d'estimation de (19') peut se faire en deux étapes :

- dans un premier temps, étant donné que la distribution de ε_i' est symétrique, on peut estimer (19') par la méthode des moindres carrés ordinaires ; tous les β_j seront sans biais ;

- dans un second temps, on identifie complètement la frontière en estimant β_0 et donc μ . Pour ce faire, il faut spécifier une distribution particulière pour chacun des termes d'erreur. On peut alors estimer μ par la méthode des moments et, par la suite β_0 (Aigner et ali, 1977).

Supposons comme précédemment que $v \rightarrow N(0, \sigma_v^2)$ et que $u \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$, alors les moments de ε_i dans (19) s'écrivent :

$$\mu_1 = E(\varepsilon) \Rightarrow E(\varepsilon) + \mu = 0 \quad (20)$$

$$E(u) = \mu = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_u$$

$$V(\varepsilon) = \mu_2 = E(\varepsilon - E(\varepsilon))^2 = \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \right) \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \quad (21)$$

$$\mu_3 = E(\varepsilon - E(\varepsilon))^3 = \sigma_u^3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \quad (22)$$

A partir du vecteur résiduel $\hat{\varepsilon}'$ de (19), on peut obtenir une estimation des moments d'ordre deux et trois $\hat{\mu}_2$ et $\hat{\mu}_3$ et donc de $\hat{\sigma}_u^2$ et $\hat{\sigma}_v^2$. Les variances $\hat{\sigma}_u^2$ et $\hat{\sigma}_v^2$ sont estimées de manière convergente par :

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left[\hat{\mu}_3 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{\pi - 4} \right]^{2/3} \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\mu}_2 - \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \right) \hat{\sigma}_u^2 \quad (24)$$

Un estimateur convergent de β_0 est dans ces conditions donné par :

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \hat{\sigma}_u^2 \quad (25)$$

Le problème ici est que l'estimateur obtenu par la méthode des moments peut ou ne pas exister (Olson, Schmidt, Waldman, 1980). Il en sera ainsi si $\hat{\mu}_3$ est positif ou quand la valeur de $\hat{\sigma}_u^2$ est négative ; ce qui est absurde. Il en sera de même, lorsqu'il est possible à partir de certaines valeurs de $\hat{\mu}_2$ et $\hat{\mu}_3$ de trouver des valeurs négatives de $\hat{\sigma}_v^2$

2. Les méthodes non paramétriques

La caractéristique essentielle de ces méthodes, c'est le fait de ne pas imposer une spécification particulière de la fonction de production. C'est un élément important qui présente deux avantages majeurs. D'abord, l'on sait que dans un échantillon hétérogène, une spécification qui conviendrait à la majorité des unités de production n'est pas obligatoirement pertinente pour un sous-ensemble d'entre elles. Ensuite, ces

méthodes permettent de considérer en même temps plusieurs outputs et plusieurs inputs.

L'inconvénient ici, réside dans le fait que les méthodes non paramétriques ne tiennent pas compte des erreurs qui peuvent affecter les données. Ces méthodes que nous allons maintenant examiner et qui découlent directement des travaux initiaux de Farrell, permettent de construire une frontière continue par morceaux. En d'autres termes, on commence d'abord par déterminer les unités de décision efficaces, ensuite on déduit à partir de ces dernières une frontière par extrapolation linéaire ou non linéaire.

Dans cette présentation, nous nous limiterons à décrire les deux modèles les plus employés dans la littérature : le modèle CCR (Charnes, Cooper et Rhodes) et le modèle BCC (Banker, Charnes et Cooper). Ce sont là, deux variantes du modèle général, communément appelé DEA (data envelopment analysis). Dans les deux cas, on distingue :

- les modèles dits "orientés inputs", si l'on étudie l'efficacité en termes d'inputs, c'est-à-dire si l'on s'intéresse à l'inefficacité en terme d'excès d'inputs ;
- les modèles dits "orientés outputs" si l'on veut analyser l'efficacité en termes d'outputs, c'est-à-dire si l'on souhaite appréhender l'inefficacité par l'insuffisance d'outputs.

L'exposé qui suit sera bref avec relativement moins de détails techniques. La méthode DEA est traitée de façon intensive par Seiford et Thrall (1990), Lovell (1993), Ali et Seiford (1993) et Charnes, Cooper, Lewin et Seiford (1995) auxquels le lecteur pourra se reporter. Par ailleurs, on trouvera une bibliographie très fouillée, et couvrant la période 1978-1990 dans l'article de Seiford (1995).

2.1. Le modèle CCR

Dans ce modèle, on fait les hypothèses suivantes :

- il existe une forte convexité de l'ensemble de production ;
- la technologie est à rendements constants ;
- il existe une libre disposition des inputs et des outputs.

On considère ici, le modèle dit "orienté input". Suivant Coelli (1996), on dispose de K inputs et M outputs pour chacune des N unités de décision (ou entreprises). On note :

x_i : le vecteur $(K,1)$ des inputs ;

y_i : le vecteur $(M,1)$ des outputs ;

X : la matrice (K,N) des inputs ;

Y : la matrice (M, N) des outputs ;

v' : le vecteur $(K, 1)$ des pondérations associées aux inputs ;

u' : le vecteur $(M, 1)$ des pondérations associées aux outputs.

Une façon intuitive de procéder, est d'introduire la méthode de DEA sous forme de ratio entre tous les outputs et tous les inputs de chaque unité de décision, c'est-à-dire comme $u' y_i / v' x_i$.

Le problème revient donc pour chaque unité de décision, à déterminer les pondérations optimales en résolvant le problème de programmation mathématique suivant :

$$\begin{cases} \max_{u,v} (u' y_i / v' x_i) \\ sc \\ u' y_j / v' x_j \leq 1 & j = 1, 2, \dots, N \\ u, v \geq 0, \end{cases} \quad (26)$$

C'est à dire que l'efficacité de la i -ème unité de décision sera obtenue comme un ratio entre outputs et inputs sous la condition que ce même ratio soit égal ou inférieur à 1 pour l'ensemble des autres unités de décision observées. Le problème avec cette forme fractionnelle, c'est qu'elle est difficile à optimiser ; sa résolution admet une infinité de solutions. Elle peut néanmoins être linéarisée si l'on définit une contrainte selon laquelle $v' x_i = 1$. Le programme s'écrit alors :

$$\begin{cases} \max_{\mu,v} (\mu' y_i) \\ sc \\ v' x_i = 1 \\ \mu' y_j - v' x_j \leq 0 & j = 1, 2, \dots, N, \\ \mu, v \geq 0, \end{cases} \quad (27)$$

où, u et v ont été remplacés par μ et v pour indiquer que c'est un programme linéaire différent. En utilisant la dualité en programmation linéaire, on obtient l'équivalent du programme (27) sous la forme d'une enveloppe :

$$\begin{cases} \min_{\theta, \lambda} \lambda \theta \\ sc \\ -y_i + Y\lambda \geq 0 \\ \theta x_i - X\lambda \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

Dans ce problème à résoudre N fois, θ est un scalaire qui représente le score d'efficacité technique de la i -ème unité de décision ($\theta \leq 1$). Si $\theta = 1$, l'unité de décision observée se situe sur la frontière, c'est à dire qu'elle est efficace au sens de Farrell ; au contraire si $\theta < 1$, cela révèle l'existence d'une inefficacité technique. λ est un vecteur $(N,1)$ de constantes appelées multiplicateurs. Ces derniers indiquent la façon dont les unités de décision se combinent pour former la frontière par rapport à laquelle la i -ème unité de décision sera comparée. Ces multiplicateurs reçoivent le nom de pairs (peers) en référence aux unités de décision efficaces ($\lambda > 0$) qui forment chaque segment de la frontière d'efficacité.

2.2. Le modèle BCC

L'hypothèse des rendements constants n'est vraiment appropriée que si l'entreprise opère à une échelle optimale. Ce qui n'est pas toujours le cas (concurrence imparfaite, contraintes financières, etc.). Banker, Charnes et Cooper (1984), ont proposé un modèle qui permet de déterminer, si la production se fait dans une zone de rendements croissants, constants, ou décroissants. Leur modèle conduit à la décomposition de l'efficacité technique en efficacité technique pure et en efficacité d'échelle. L'hypothèse des rendements d'échelle constants, conduit à la mesure de l'efficacité totale ; l'hypothèse de rendements d'échelle variables conduit à celle de l'efficacité technique pure. Ainsi, le modèle CCR peut être modifié en tenant compte de l'hypothèse des rendements variables à l'échelle. Il suffit pour cela d'ajouter une contrainte : $N1'\lambda = 1$ au programme (28) ; on obtient :

$$\begin{cases} \min_{\theta, \lambda} \theta \\ sc \\ -y_i + Y\lambda \geq 0 \\ \theta x_i - X\lambda \geq 0 \\ N1'\lambda = 1 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Où $N1$ est un vecteur $(N,1)$ unitaire.

3. Application a des entreprises africaines subsahariennes

3.1. Frontière paramétrique déterministe

3.1.1. Les données

Les données sont extraites de l'article de J.Y. Lesueur et P. Plane (1995). Elles concernent dix entreprises du secteur électrique.

Tableau 1 : Données caractéristiques des entreprises africaines

| Pays | Entreprise | Forme Juridique | Q GWH | K (MW) | L | TENC1 | Période |
|---------------|------------|-----------------|--------|--------|------|-------|---------|
| Bénin | SBEE | Etat | 23.3 | 5.1 | 1425 | 4.5 | 86-89 |
| Burkina | SONABEL | Etat | 14.7 | 6.2 | 1007 | 4.6 | 86-89 |
| Cameroun | SONEL | Etat | 2447.0 | 74.8 | 3769 | 9.1 | 84-89 |
| Côte d'Ivoire | EECI | Mixte | 1950.0 | 93.0 | 3769 | 10.6 | 83-89 |
| Gabon | SEEG | Mixte | 821.2 | 26.9 | 1939 | 11.1 | 82-88 |
| Niger | NIGELEC | Mixte | 31.5 | 8.4 | 1202 | 4.3 | 85-89 |
| Rwanda | ELECTROGAZ | Etat | 104.3 | 2.5 | 1078 | 5.6 | 85-88 |
| Sénégal | SENELEC | Etat | 731.6 | 20.0 | 2128 | 9.1 | 80.89 |
| Togo | CEET | Mixte | 34.8 | 9.0 | 1021 | 5.0 | 86-89 |
| Zaire | SNEL | Etat | 3580.3 | 240.6 | 4518 | 9.0 | 86-89 |

NB : Q : production physique d'électricité ; K : puissance nominale installée ;

L : effectif total ; TENC1 : taux d'encadrement.

Source : J.Y. Lesueur et P. Plane (1995)

3.1.2. Le Modèle

J.Y. Lesueur et P. Plane (1995) ont estimé une frontière de production et les efficacités techniques de dix entreprises subsahariennes d'électricité. Ils ont choisi pour ce faire, une frontière de production de type Cobb-Douglas, prenant en compte les facteurs conventionnels : à savoir le travail et le capital ainsi qu'un progrès technique incorporé. La forme structurelle du modèle retenue par J.Y. Lesueur et P. Plane est la suivante :

$$\text{Log}Q_{it} = (\beta_0 + \mu) + \beta_1 K_{it} + \beta_2 \text{Log}\bar{L}_{it} + \gamma t + \varepsilon_{it} \quad (30)$$

où :

Q_{it} = Production de l'entreprise i à la période t (mesurée en Gwh) ;

K_{it} = Capital technique de l'entreprise i mesuré par la puissance nominale installée du réseau (en Mw) ;

\bar{L}_{it} = Emploi mesuré en unités de productivités marginales équivalentes ;

γ est une variable temporelle captant l'effet du progrès technique incorporé ;

$\varepsilon_{it} = u_{it} - \mu$; avec $\mu = \text{Max}(u_{it})$

Par ailleurs :

$$\text{Log}\bar{L}_{it} = \text{Log}L_{it} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \frac{L_{ijt}}{L_{it}} \quad (31)$$

L_{it} est l'emploi total de l'entreprise i à la période t ;

L_{ijt} / L_{it} représente le taux d'emploi de la qualification j dans l'entreprise i à la période t .

Des relations (30) et (31), on déduit la forme réduite du modèle :

$$\text{Log}Q_{it} = (\beta_0 + \mu) + \beta_1 \text{Log}K_{it} + \beta_2 \text{Log}L_{it} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \frac{L_{ijt}}{L_{it}} + \gamma t + \varepsilon_{it} \quad (32)$$

Deux taux d'emploi sont considérés : l'un, ($TENC_1$) mesure la part de l'encadrement dans l'effectif total et l'autre, ($TENC_2$) la part du personnel maîtrise dans l'effectif total. Le degré d'efficacité technique (TE_i) est calculé pour chaque entreprise à partir de la série des résidus unilatères (ε_{it}). Soit : $TE_i = \exp(\varepsilon_{it}) \times 100$

3.1.3. Résultats de l'estimation du modèle

J.Y. Lesueur et P. Plane ont estimé le modèle (32) par la méthode des moindres carrés décalés. Au vu des tests économétriques habituels, certaines variables ont été jugées non significatives. La configuration définitive du modèle ne contient que les variables explicatives : K , L et $TENC_1$ avec un $R^2 = 0.98$. Le degré d'efficacité technique calculé (en %) pour chaque entreprise est donné dans le tableau 2.

Tableau 2. Efficacité technique (en %)

| Pays | Efficacité | classement |
|---------------|------------|------------|
| Bénin | 79.8 | 8 |
| Burkina | 75.6 | 10 |
| Côte d'Ivoire | 77.9 | 9 |
| Niger | 85.7 | 7 |
| Cameroun | 88.5 | 4 |
| Gabon | 86.2 | 6 |
| Sénégal | 88.0 | 5 |
| Togo | 92.7 | 1 |
| Rwanda | 89.7 | 3 |
| Zaïre | 90.2 | 2 |
| Moyenne | 85.4 | |

3-2 Frontière non paramétrique

3-2-1 Les données

Elles proviennent de l'étude de Mbangala et Perelman (1997), sur l'efficacité technique de neuf sociétés de chemins de fer en Afrique subsaharienne. Elles sont présentées dans le tableau 3.

**Tableau 3 : Caractéristiques des neuf sociétés de chemins de fer
(Valeurs moyennes sur la période 1981 – 1985)**

| Réseaux Pays | Effectifs (personnes) | Equipement (unités) | Voyageurs Km (10 ⁶) | Tonnes Km (10 ⁶) |
|-------------------|--------------------------|------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| CFCO Congo | 5034 | 1793 | 394.4 | 493.2 |
| CFM Mozambique | 29940 | 9127 | 521.4 | 1284.4 |
| KR Kenya | 22699 | 9336 | 650.0 | 2065.0 |
| OCBN Bénin | 2566 | 505 | 169.0 | 167.0 |
| RFCM Mali | 2237 | 427 | 151.2 | 179.2 |
| RNFC Cameroun | 6690 | 2118 | 400.8 | 847.2 |
| SNCS Sénégal | 2434 | 1129 | 82.4 | 362.8 |
| SNCZ Zaïre | 22377 | 5565 | 405.8 | 1933.8 |
| ZR Zambie | 8430 | 6857 | 465.6 | 1395.6 |

Source : M. Mbangala, S. Perelman (1997)

3.2.2. Le modèle

Dans l'application du modèle non paramétrique aux données du tableau 3, Mbangala et Perelman ont choisi une approche plus générale, c'est-à-dire l'hypothèse des rendements variables et l'orientation en outputs pour la mesure des efficacités techniques. Ils justifient leur choix par le fait que les entreprises publiques, et particulièrement celles qui opèrent dans les pays en développement, ont comme objectif la maximisation de l'offre de leur service. Par ailleurs, ils ont adopté une hypothèse de travail selon laquelle, la technologie de production du transport par rail peut être résumée avec deux inputs : le travail et l'équipement ; et avec deux outputs : les voyageurs-kilomètres et les tonnes kilomètre des marchandises. Ainsi, le programme (29), c'est-à-dire le modèle BCC a été appliqué aux données du tableau 3. Le calcul des efficacités techniques des neuf entreprises a été fait en utilisant le logiciel DEAP (Coelli, 1996).

3.2.3. Estimation

Dans le tableau 4, sont donnés les résultats obtenus.

Tableau 4. Efficacité technique des réseaux (en %)

| Réseaux | Efficacité | Classement |
|---------|------------|------------|
| CFCO | 92.4 | 2 |
| CFM | 69.4 | 9 |
| KR | 87.2 | 6 |
| OCBN | 90.0 | 4 |
| RCFM | 93.6 | 1 |
| RNCFC | 88.1 | 5 |
| SNCS | 83.1 | 7 |
| SNCZ | 73.2 | 8 |
| ZR | 92.1 | 3 |
| Moyenne | 85.5 | |

4. Perspectives

Dans des publications ultérieures, ce document sera complété dans deux directions. Tout d'abord, nous reviendrons sur des exemples pratiques et en définissant à chaque fois, des spécifications adéquates.

Dans la seconde direction, nous aborderons les développements récents de ces méthodes, notamment :

- ceux qui concernent l'estimation des frontières paramétriques avec facteurs exogènes d'inefficacité. Ce sont des facteurs structurels d'environnement, totalement extérieurs au processus de production, mais qui expliquent une partie de l'inefficacité. Dans le cas des sociétés d'électricité examinées précédemment, ce sont des facteurs qui relèvent par exemple de la nature hydraulique ou thermique de l'énergie produite, de l'intensité de la demande,..., ou de façon générale, du niveau du développement du pays ;
- ceux qui portent sur les données individuelles cumulant une dimension coupe et une dimension temporelle (données de panel). A ce sujet, plusieurs modèles d'estimation de frontières paramétriques stochastiques ont été proposés dans la littérature pour étudier la variation temporelle de l'efficacité technique ;
- ceux relatifs à l'extension du modèle DEA. Dans cette extension, sont considérés les problèmes de l'efficacité allocative (minimisation des coûts, maximisation du revenu), de la prise en compte des variables d'environnement et des variables non "discrétionnaires" (outputs et inputs non contrôlés par le gestionnaire).

Nous souhaitons ainsi pouvoir contribuer à la vulgarisation des frontières de production pour un large public d'utilisateurs.

Appendice : frontière non paramétrique déterministe

(Au sens de Farrell)

C'est dans son travail pionnier datant de 1957, que Farrell a proposé la construction d'une frontière non paramétrique à partir des observations sur des activités productives. Il a également introduit les notions d'efficacité technique et d'efficacité allocative, ainsi que leur mode de calcul. Farrell a illustré son idée en prenant un exemple simple : le cas d'une firme qui utilise deux inputs pour produire un output ; la fonction de production s'écrit :

$$y = f(x_1, x_2)$$

Il a aussi supposé que la technologie était à rendements constants, soit :

$$1 = f(x_1/y, x_2/y)$$

Dans ces conditions, la frontière technologique peut être caractérisée par une isoquante unitaire que l'on a notée par UU' dans la figure 1. Cette isoquante permet de calculer l'efficacité technique. Les points situés au-dessus de l'isoquante caractérisent les firmes non efficaces. Le ratio des distances entre le point à l'origine et le point efficace (sur l'isoquante) d'une part et le point observé d'autre part mesure l'efficacité technique de la firme considérée.

Si par exemple, une firme utilise des quantités d'inputs définies par le point A pour produire une unité d'output, l'inefficacité technique de cette firme peut être mesurée par la distance BA . Cette dernière indique la réduction proportionnelle dans l'utilisation des inputs qui permet de continuer à produire le même niveau d'output. Cette inefficacité est aussi mesurée par le ratio BA/OA . Ainsi, l'efficacité technique d'une firme est en général mesurée par le ratio :

$$\begin{aligned} TE_i &= OB/OA \\ &= 1 - BA/OA \end{aligned} ;$$

qui prend les valeurs entre zéro et un. En regardant la figure 1, on peut constater que le point B est techniquement efficace ; car il se situe sur l'isoquante efficace.

Si maintenant, l'on donne la ligne isocoût PP' , représentant le ratio des prix des inputs, on peut alors calculer l'efficacité allocative. Elle est mesurée par le ratio :

$$AE_i = OD/OB .$$

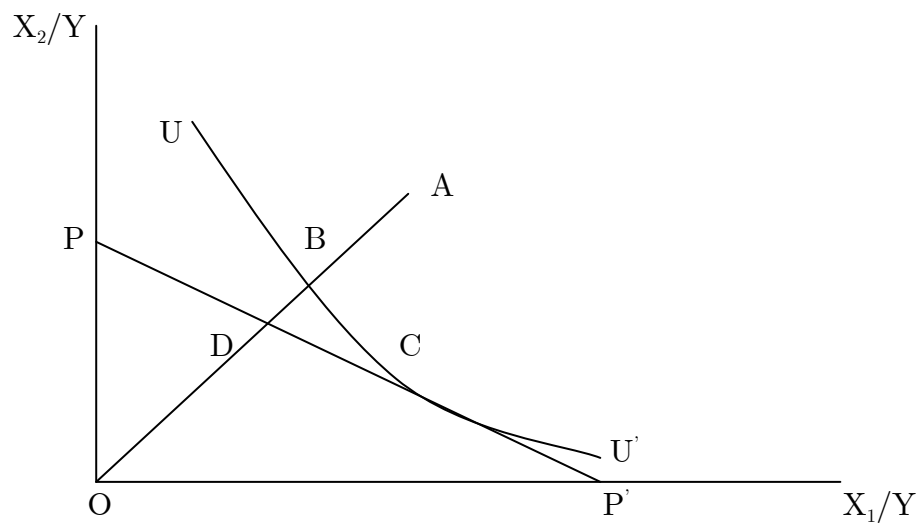
Et finalement l'efficacité économique totale est mesurée par le ratio :

$$EE_i = OD / OA.$$

Par ailleurs, la distance DB peut s'interpréter en termes de réduction des coûts. L'efficacité économique totale peut encore s'écrire :

$$EE_i = TE_i \cdot AE_i = (OB / OA)(OD / OB) = OD / OA$$

Fig : 1 Mesure de l'efficacité technique



Bibliographie

- Afriat, S.N.**, (1972). Efficiency estimation of production functions, *International Economic Review*, 13, 568-598.
- Agbodji, A.E.**, (1996). *l'efficacité technique dans l'industrie ivoirienne*, Mémoire de DEA, PTCI, Université d'Abidjan.
- Aigner, D.J., Chu, S.F.**, (1968). On estimating the industry production function, *American Economic Review*, 58, 826-839.
- Aigner, D.J., Lovell, C.A.K., Schmidt P.**, (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6, 21-27
- Ali, A.I., Seiford, L.M.**, (1993). The mathematical programming approach to efficiency analysis, in Fried, H.O., C.A.K. Lovell and S.S. Schmidt (Eds), *The measurement of productive efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, N.Y. 120-129.
- Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W.**, (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-1092.
- Battese, G.E., Coelli, T.J.**, (1993). A stochastic frontier production function incorporating a model for technical inefficiency effects, *Working Paper in Econometrics and Applied statistics*, n°69, Departement of Econometrics, University of New England, Armidale.
- Bauer, P.W.**, (1990). Recent developments in the econometric estimation of frontier, *Journal of Econometrics*, 46, 39-56.
- Bjurex, H., Hjalmarson, L., Forsund, F.R.**, (1990). Deterministic parametric and nonparametric estimation of efficiency in service production. A comparison, *Journal of Econometrics*, 46, 213-227.
- Bosman, N., Fecher, F.**, (1992). Une étude comparative de l'efficacité technique du secteur de la santé au sein des pays de l'O.C.D.E, *Working Paper, 92/08, CIRIEC*, Université de Liège.
- Broek, J.V.D., Forsund, F.R., Hjalmarson, L.**, (1980). On the estimation of stochastic and deterministic frontier production function. *Journal of Econometrics*, 13, 117-138.
- Chaffai, M.E.**, (1989). Estimation des frontières de production et de l'inefficacité technique. *Economie et Prévision*, n°91, 67-73.

- Chauveau, T., Couppey, J.,** (1999). Les banques françaises de réseaux n'ont pas de problèmes majeurs d'inefficacité productive : une application de la technique d'enveloppement des données (DEA), *Cahiers de la MSE, 1999.92*, Université de Paris 1.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.,** (1978). Measuring the efficiency of decisions making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 29-44.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M.,** (1995). *Data envelopment analysis. Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L.M., Stutz, J.,** (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions, *Journal of Econometrics*, 30, 91-107.
- Coelli, T.J.,** (1996). A guide to FRONTIER, version 4.1 : A computer program for frontier production function estimation, CEPA, *Working Paper 96/07*, Department of Econometrics, University of New England, Armidale.
- Coelli, T.J.,** (1996). A guide to DEAP, version 2.1 : A data Envelopment analysis (computer) program, CEPA, *Working Paper 96/08*, Department of Econometrics, University of New England, Armidale.
- Coelli, T.J.,** (1998), A multi-stage methodology for solution of orientated DEA models, CEPA, *Working Paper 96/01*, Department of Econometrics, University of New England, Armidale.
- Coelli, T.J., Rao, D.S.P, Battese, G.E.,** (1998). *An introduction to efficiency and productivity analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Debreu, G.** (1951). The coefficient of ressource utilisation, *Econometrica*, 19, 273-292.
- Deprins, D., Simar, L.,** (1989). Estimation des frontières déterministes avec facteurs exogènes d'inefficacité. *Annales d'Economie et de Statistique*, n°1, 117-150.
- Fare, R., Lovell, C.A.K.,** (1978). Measuring the technical efficiency of production, *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- Farrell, M.J.,** (1957), The measurement of productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, CXX, Part 3, 253-290.
- Fecher, F., Perelman, S.,** (1989). Productivité, Progrès technique et Efficacité, *Annales d'Economie et de Statistique*, n°13, 93-150.
- Forsund, F.R., Hjalmarsson, L.,** (1974). On the measurement of productive efficiency, *Swedish Journal of Economics*, 76, 141-152.

- Forsund, F.R., Hjalmarsson, L.**, (1979). Generalised Farrell measures of efficiency : an application to milk processing in Swedish dairy plants, *Economic Journal*, 89, 294-315.
- Forsund, F.R., Lovell, C.A.K., Schmidt, P.**, (1980). A survey of frontier production functions and their relationship to efficiency measurement, *Journal of Econometrics*, 13, 5-25.
- Fried, H.O., Lovell, C.A.K., Schmidt, S.S.**, (1993). *The measurement of productive efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, N.Y.
- Gathon, H.J., Pestieu, P.**, (1995). La performance des entreprises publiques. Une question de propriété ou de concurrence, *Discussion Papers 95/06, CREPP*, Université de Liège.
- Greene, W.H.**, (1980). Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions, *Journal of econometrics*, 13, 101-113.
- Greene, W.H.**, (1993). The econometric approach to efficiency analysis, in Fried, H.O., C.A.K. Lovell and S.S. Schmidt (Eds), *The measurement of productive efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, New York, 68-119.
- Greene, W.H.**, (2000). *Econometric Analysis*, Printice Hall.
- Jondrow, J., Lovell, C.A.K., Materov, I.S., Schmidt, P.**, (1982). On estimation of technical inefficiency in stochastic frontier production function model, *Journal of Econometrics*, 19, 233-238.
- Koopmans, T.C.**, (1951). An analysis of production as an efficient combination of activities, in T.C Koopmans, (Ed) *Activity analysis of production and allocation*, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph n°13, Wiley, New York, 33-97.
- Kumbhakar, S.C., Lovell, C.A.K.**, (2000). *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press.
- Lesueur, J.Y., Plane, P.**, (1995). Frontière de production et mesure de l'efficacité technique : le cas de l'électricité dans dix entreprises subsahariennes, *Annals of Public and Cooperative Economic*, CIRIEC, 66, 3, 299-319.
- Mbangala, M., Perelman, S.**, (1997). L'efficacité technique des chemins de fer en Afrique subsaharienne : une comparaison internationale par la méthode de DEA, *Revue d'Economie du Développement*, 3, 91-115.
- Meeusen, W., Van den Broeck, J.**, (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas Production functions with composed error, *International Economic Review*, 18, 435-44.

- Olson, J.A., P. Schmidt, Waldman, D.M.**, (1980). A Monte-Carlo study of estimators of stochastic frontier production functions, *Journal of Econometrics*, 15, 67-82.
- Perelman, S.**, (1996). la mesure de l'efficacité des services publics, *Revue Française des Finances Publiques*, 55, 65-79.
- Richmond, J.**, (1974). Estimating the efficiency of production, *International Economic Review*, 15, 515-521.
- Schmidt, P.**, (1976). On the statistical estimation of parametric frontier production functions, *Review of Economics and Statistics*, 58, 238-239.
- Seiford, L.M., Thrall, R.M.**, (1990). Recent developments in DEA : The mathematical approach to frontier analysis, *Journal of Econometrics*, 46, 7-38.
- Stevenson, R.E.**, (1980). Likelihood functions for generalised stochastic frontier estimation, *Journal of Econometrics*, 13, 57-66.
- Taffe P.**, (1998). Frontière d'efficacité et évaluation de la performance énergétique des bâtiments, *Thèse de Doctorat* es Sciences Economiques, Université de Genève.
- Thiry, B.**, (1985). Une analyse de l'efficacité technique d'une société de transports intercommunaux. Le cas de la STIL, *Working Paper 85/07*, CIRIEC, Université de Liège.
- Thiry, B.**, (1986). La performance d'un service public. Définition, méthodes de mesure et application à la Régie des Postes en Belgique, *L'actualité Economique, Revue d'Analyse économique*, 62, 2, 305-335.
- Thiry, B., Tulkens, H.**, (1988). Productivité, efficacité et progrès technique, *8^{ème} Congrès des Economistes Belges*.
- Zellner, A., Revankar, N.S.**, (1969). Generalised production functions, *Review of Economic Studies*, 36, 21-250.
- Zellner, A., Kmenta, J., Dreze, J.**, (1966). Specification and estimation of Cobb-Douglas Production function models, *Econometrica*, 34, 784-795.